| | | |
|---|---|---|
| *Nom :* ........................ <br> *Prénom :* ........................ | **DS 02** | TMEX OISELET <br> *Devoir n° 02* | *Nov. 2022* <br> .../... |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises.***
*Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

**Attention ! Le sujet est recto-verso.**

## *Exercice 1 : Calcul matriciel...* — *5 points*

5 pts Calculer **à la main** lorsque cela est possible, les produits de matrices suivants :

**1** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2+5\times 1 & 2\times 1+5\times 4 \\ 3\times 2+6\times 1 & 3\times 1+6\times 4 \\ 1\times 2+4\times 1 & 1\times 1+4\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 22 \\ 12 & 27 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$

Ce produit est de type (3,2) ×(2,2), il donne une matrice (3,2).
Comme le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de ligne de la deuxième. Ce produit est possible.

**2** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

n'est pas possible car le nombre de colonnes de la première matrice ici 2 n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième matrice ( ici 3).

**3** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+2\times(-1)+(-1)\times 2 \\ 2\times 1+3\times(-1)+1\times 2 \\ 0\times 1+1\times(-1)+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

## *Exercice 2* — *4 points*

Identité remarquable

On donne les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

3 pts **1** Calculer les produits $(A-B)^2$ et $A^2-2AB+B^2$. (On détaillera les calculs)

- $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$
- $(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+16 & 16+16 \\ 16+16 & 16+16 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Ainsi } (A-B)^2 = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix}}$$

- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$
- $B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+42 & 30+48 \\ 35+56 & 42+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{pmatrix}$
- $2AB = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}$
- $A^2-2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-38+67 & 10-44+78 \\ 15-86+91 & 22-100+106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 44 \\ 20 & 28 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^2-2AB+B^2=\begin{pmatrix}38 & 44\\ 86 & 100\end{pmatrix}}$$

1 pt **2** L'égalité $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ est-elle vérifiée ? Pourquoi ?

L'égalité $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ n'est pas toujours vérifiée. La question précédente fournit un contre-exemple.

En effet $\begin{pmatrix}32 & 32\\ 32 & 32\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}38 & 44\\ 86 & 100\end{pmatrix}$, car par exemple $32 \neq 36$.

Par ailleurs $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2$

Ainsi

$$\begin{aligned}(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2 &\iff A^2-AB-BA+B^2 = A^2-2AB+B^2\\ &\iff AB+BA = AB+AB\\ &\iff AB=BA\end{aligned}$$

## Exercice 3 — 5 points

On pose $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

1 pt **1** Calculer $A^2$

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3+1\times0 & 3\times1+1\times2\\ 0\times3+2\times0 & 0\times1+2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

3.5 pts **2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ ; $A^n=\begin{pmatrix}3^n & 3^n-2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

On note $T(n)$ la propriété $A^n=\begin{pmatrix}3^n & 3^n-2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

- Initialisation :Au rang 1 $A^1=A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}3^1 & 3^1-2^1\\ 0 & 2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=A$ ce qui est vrai, donc $T(1)$ est vraie
- Hérédité :Soit $p \geq 1$, on suppose que $A^p=\begin{pmatrix}3^p & 3^p-2^p\\ 0 & 2^p\end{pmatrix}$.

  En utilisant $A^{p+1}=A^p\times A$

$$\begin{aligned}A^{p+1} &= A^p\times A\\ &= \begin{pmatrix}3^p & 3^p-2^p\\ 0 & 2^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3^p\times 3 & 3^p+2(3^p-2^p)\\ 0 & 2^p\times 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3^{p+1} & 3^p+2\times3^p-2\times2^p\\ 0 & 2p+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3^{p+1} & 3^{p+1}-2^{p+1}\\ 0 & 2^{p+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Conclusion :Le principe de récurrence s'appliquant, on a :

  pour tout $n \geq 1$ ; $A^n=\begin{pmatrix}3^n & 3^n-2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

  Ainsi pour tout entier naturel $n; u_n = u_0$.

0.5 pt **3** En déduire $A^{10}$

$A^{10}=\begin{pmatrix}3^{10} & 3^{10}-2^{10}\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59\,049 & 58\,025\\ 0 & 1\,024\end{pmatrix}$.

$$\boxed{A^{10} = \begin{pmatrix} 59\,049 & 58\,025 \\ 0 & 1\,024 \end{pmatrix}.}$$

## Exercice 4 — 4 points

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.5 pt **1** Calculer $A^2$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1-1+1 & 1-1+1 \\ -1-1+1 & 1+1+1 & -1+1+1 \\ 1-1+1 & -1+1+1 & 1+1+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.5 pt **2** Démontrer que $A^2 - A - 2I_3 = O$

$$\begin{aligned} A^2 - A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $I_3$ est la matrice unité d'ordre 3 et $O$ la matrice nulle d'ordre 3.

1 pt **3** En déduire une matrice $B$ vérifiant $A \times B = I_3$

On a : $A^2 - A - 2I_3 = O$

$$\begin{aligned} A^2 - A - 2I_3 = O &\iff A^2 - A = 2I_3 \\ &\iff A \times (A - I_3) = 2I_3 \\ &\iff A \times \left(\frac{1}{2}\right)(A - I_3) = I_3 \end{aligned}$$

Ceci prouve que la matrice $A$ est inversible et que son inverse est $B = \left(\frac{1}{2}\right)(A - I_3)$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{2}\right)(A - I_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}}$$

## Exercice 5 Bonus — 3 points

3 pts

Déterminer les réels $x$ et $y$ tes que $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Déjà

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 & y-8 \\ -2x+12 & -2y+16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} x-6 & y-8 \\ -2x+12 & -2y+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x-6=-5 \\ y-8=-6 \\ -2x+12=10 \\ -2y+16=12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \text{ ssi } x=1 \text{ et } y=2.}$$