Nom :	**DS 03**	TMEX OISELET	*Dec. 2023*
Prénom :		*Devoir n° 05*	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso. Vous choisirez de traiter au choix l'exercice 2 ou l'exercice 3.

Exercice 1 — *3 points*

3 pts

On donne la forme exponentielle de deux nombres complexes : $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 z_2$
2. z_1^2
3. $\dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 2 — *7 points*

7 pts

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).
La figure sera complétée au fur et à mesure que l'énoncé le demandera.
Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i\sqrt{3}, \quad Z_B = \overline{Z_A} \text{ et } Z_C = 2.$$

On rappelle que $\overline{Z_A}$ représente le nombre complexe conjugué de Z_A.

2. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe Z_A.
b. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z_B.
c. Placer les points A, B et C sur la figure.
d. Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 3 Un classique — *7 points*

7 pts i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \quad Z_2 = \frac{2+i}{3-i} \text{ et } Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z_1.
2. **a.** Écrire le nombre complexe Z_2 sous forme algébrique et montrer que : $Z_2 = \overline{Z_1}$.
b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_2.
3. Écrire le nombre complexe Z_3 sous forme algébrique.
4. On note Z le nombre complexe défini par : $Z = Z_2 Z_3$.

a. Calculer le module et un argument du nombre complexe Z.

b. Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique.

c. En déduire les valeurs exactes des nombres réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 — 3 points

Linéariser avec une méthode de votre choix

3 pts

$$f(x) = \sin^3(x)$$

Exercice 5 Un vrai faux — 7,5 points

7.5 pts Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué **2.5 points par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct .

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\mathrm{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.