

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.  
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

 **Attention! Le sujet est recto-verso.**

 **Exercice 1 : Calcul matriciel...**

*5 points*

5 pts On considère les matrices à coefficients réels :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1** Calculer  $AB$  et  $BA$ .
- 2** Sans plus de calcul, en déduire que  $A$  et  $B$  sont inversibles et calculer  $A^{-1}$ .

 **Exercice 2**

*4 points*

On donne la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1 pt **1** Justifier que  $A$  est inversible.
- 3 pts **2** Calculer  $A^{-1}$ .

 **Exercice 3**

*7 points*

On donne  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soient  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- 1 pt **1** Calculer  $QP$ . Que peut-on déduire?
- 2 pts **2** Montrer que  $A = PDQ$ .
- 4 pts **3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n = PD^nQ$ .

 **Exercice 4**

*4 points*

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x - y = -\frac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

- 1 pt **1** En posant  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $B$  une matrice  $2 \times 1$  à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité  $AX = B$ .
- 1 pt **2** Calculer  $A^{-1}$  à l'aide de la calculatrice.
- 1 pt **3** Montrer que  $X = A^{-1}B$ .
- 1 pt **4** En déduire la résolution de (S).



*Exercice 5 Bonus*

*3 points*

3 pts Soit  $X$  et  $Y$  deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si  $XY = 0$  (la matrice nulle), alors les matrices  $X$  et  $Y$  ne sont pas inversibles.