Nom :	DS 07	2nde 06 Janv. 2023
Prénom :		Devoir n° 12 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1Cours — 0 point

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(3;1);B(2;-1)$ et $C(-2;3)$.

1 Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\-1-1\end{pmatrix}$ ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}}$

2 Calculer AB

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.\boxed{AB=\sqrt{5}}$

3 Calculer les cordonnées du milieu de $[AC]$

Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $I\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_C}{2}\\\dfrac{y_A+y_C}{2}\end{pmatrix}$ soit $\boxed{I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}}$

4 Soit $D(2014\ ;\ 4023)$. Montrer que les points A, B et D sont alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2023-3\\4041-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2011\\4022\end{pmatrix}$

On calcule $\text{dét}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-1 & 2020\\-2 & 4040\end{vmatrix}=-1\times4040-(-2)\times2020=-4040+4040=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et D sont alignés.

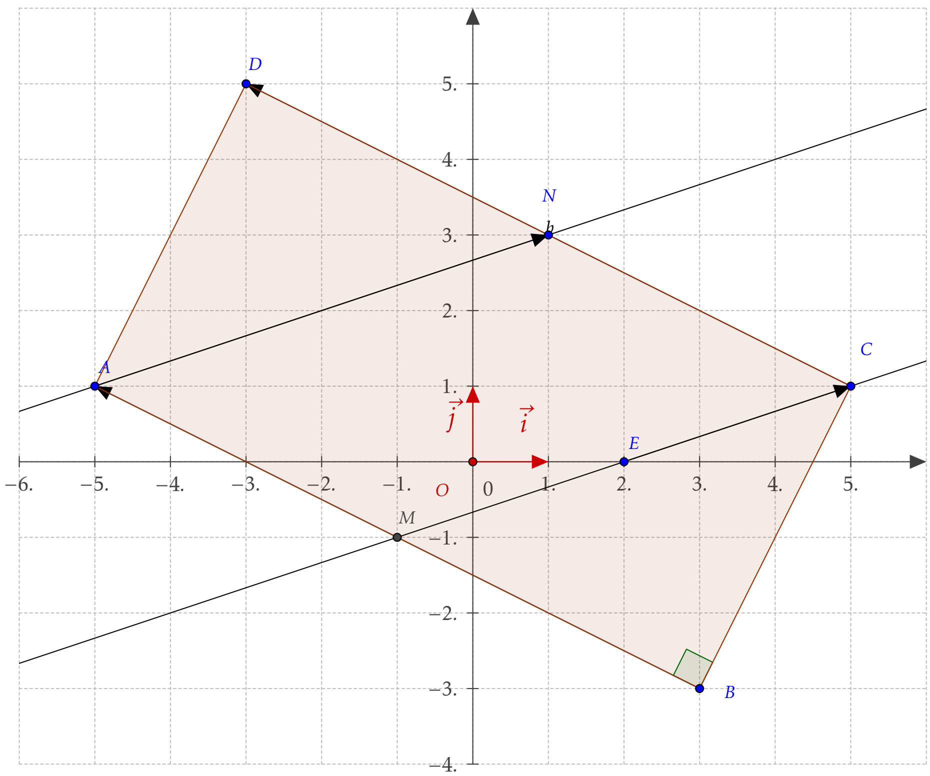
5 Déterminer les coordonnées de P tel que $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

P vérifie $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$; en posant $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; on a $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix}3-x\\1-y\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}6-3x\\-3-3y\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x & +6-3x= & 0\\1-y & -3-3y= & 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x & = & \frac{9}{4}\\y & = & -\frac{1}{2}\end{cases}$ .Donc $\boxed{P\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

Exercice 2 — 0 point

1 Placer les points $A\,(-5;1)$, $B\,(3;-3)$, $C\,(5;1)$ et $E\,(2;0)$.



2 **a.** Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.

Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées $M\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$ soit $\boxed{M\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

b. Les points E, C et M sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, On calcule $\text{dét}(\overrightarrow{EC}; \overrightarrow{EM}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 1 \times (-3) = -3 + 3 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires, donc les points E, C et M sont alignés.

3 **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-5) \\ -3-1 \end{pmatrix}$ ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}}$

b. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On pose $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 5-x & = & 8 \\ 1-y & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3 \\ y & = & 5 \end{array} \right.$ .Donc $\boxed{D\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$

4 **a.** Calculer les distances AC et AB. ?

- ☐ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-(-5) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10.$ $\boxed{AC = 10}$
- ☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$ $\boxed{AB = 4\sqrt{5}}$

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
On calcule BC :
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$ $\boxed{BC = 2\sqrt{5}}$

Comme $AB^2 + BC^2 = 80 + 20 = 100 = AC^2$, on déduit grâce à la propriété réciproque de Pythagore que ABC est rectangle en B.

5 Placer le point N de coordonnées $(1;3)$.
Les droites (AN) et (EC) sont-elles parallèles ?
Les droites (AN) et (EC) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

- ☐ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - x_A \\ y_N - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ On voit clairement que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{EC}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
  Donc les droites (AN) et (EC) sont parallèles.

Exercice 3 — 0 point

On considère le quadrilatère $ABCD$ formé des points $A(2\ ;\ 1)$, $B(5\ ;\ 1)$, $C(5\ ;\ 3)$ et $D(2\ ;\ 3)$.

1 Déterminer les coordonnées du point F milieu de $[AC]$

Le milieu F de $[AC]$ a pour coordonnées $F\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix}$ soit $\boxed{F\begin{pmatrix} \dfrac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}$

2 Calculer les distances : FA; FB; FC et FD ?

a. $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix} x_A - x_F \\ y_A - y_F \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix} 2 - \dfrac{7}{2} \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ $FA^2 = (-\dfrac{3}{2})^2 + (-1)^2 = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$.Donc $\boxed{FA = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$.

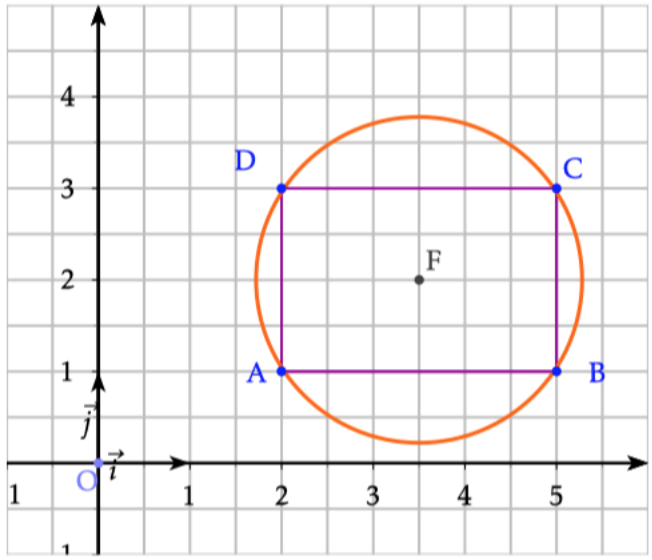
b. $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} x_B - x_F \\ y_B - y_F \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} 5 - \dfrac{7}{2} \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ $FB^2 = (\dfrac{3}{2})^2 + (-1)^2 = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$.Donc $\boxed{FB = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$.

c. $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} x_C - x_F \\ y_C - y_F \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} 5 - \dfrac{7}{2} \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $FC^2 = (\dfrac{3}{2})^2 + (1)^2 = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$.Donc $\boxed{FC = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$.

d. $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} x_D - x_F \\ y_D - y_F \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} 2 - \dfrac{7}{2} \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $FD^2 = (-\dfrac{3}{2})^2 + (1)^2 = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$.Donc $\boxed{FD = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$.

3 Interpréter.

On a donc $FA = FB = FC = FD = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Donc les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre F de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.



Exercice 4 — *0 point*

Soit $f(x) = (x-3)^2 + (2x-5)(x-3)$

1 Développer et réduire $f(x)$

$f(x) = (x-3)^2 + (2x-5)(x-3) = x^2 - 6x + 9 + 2x^2 - 6x - 5x + 15 = 3x^2 - 17x + 24$ $\boxed{f(x) = 3x^2 - 17x + 24}$

2 Factoriser $f(x)$

$f(x) = (x-3)^2 + (2x-5)(x-3) = (x-3)(x-3) + (2x-5)(x-3) = (x-3)[(x-3)+(2x-5)].$ $\boxed{f(x) = (x-3)(3x-8)}$

3 Calculer les images par f des réels $3+\sqrt{2}$ et $-\dfrac{1}{3}$.

On utilise l'écriture $f(x) = x^2 - 17x + 24$, on a alors $f(3+\sqrt{2}) = 3(3+\sqrt{2})^2 - 17(3+\sqrt{2}) + 24 = 3(9+6\sqrt{3}+2) - 51 - 17\sqrt{2} + 24 = 6 + \sqrt{2}.$ $\boxed{f(3+\sqrt{2}) = 6+\sqrt{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - 17 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 24 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{17}{3} + 24 = 30.$ $\boxed{f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 30}$

4 Déterminer le ou les antécédent(s) de -6 par f.

Les antécédents éventuels de 24 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 24$

$f(x) = 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 17x + 24 = 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 17x = 0 \Leftrightarrow x(3x-17) = 0$ $x = 0$ ou $x = \dfrac{17}{3}$

24 a deux antécédents par f 0 et $\dfrac{17}{3}$.