Nom : .... Prénom :	**DS 07**	TSTI2D OISELET Devoir n° 11	Fév. 2023 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	Solution générale
$y'+16y=0$	$y'=-16y$	-16	$y=Ce^{-16x}$ où $C\in\mathbb{R}$
$4y'+25y=0$	$y'=-\frac{25}{4}y$	$-\frac{25}{4}$	$y=Ce^{-\frac{25}{4}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

Exercice 2 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	b	Solution générale
$y'=2y+3$	$y'=2y+3$	2	3	$y=-\dfrac{3}{2}+Ce^{2x}$ où $C\in\mathbb{R}$
$3y'-2y=6$	$y'=\dfrac{2}{3}y+2$	$\dfrac{2}{3}$	2	$y=-3+Ce^{\frac{2}{3}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

Exercice 3 — 7 points

Partie A On considère l'équation différentielle (E) :$2y'+4y=1$

1 pt **1** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $2y'+4y=0$.
$2y'+4y=0$ s'écrit $y'=-2y$. On sait que les solutions sont de la forme :

$$\boxed{y=Ce^{-2x},\ C\in\mathbb{R}.}$$

1 pt **2** Vérifier que $y(x)=Ce^{-2x}+\dfrac{1}{4}$ est solution de (E).

On calcule $y'(x)=-2Ce^{-2x}$ et donc $2y'+4y=-2\times 2Ce^{-2x}+4\left(Ce^{4x}+\dfrac{1}{4}\right)=-4Ce^{-2x}+4Ce^{-2x}+1=1$.

$$\boxed{y(x)=Ce^{-2x}+\frac{1}{4}\text{ est bien solution de (E)}}$$

Autre façon : on sait que les solutions de l'équation $y'=ay+b$ sont les fonctions $y=-\dfrac{b}{a}+Ce^{ax}$.
$2y'+4y=1$ s'écrit $y'=-2y+\frac{1}{2}$, elle donc de la forme $y'=ay+b$ où $a=-2$ et $b=\frac{1}{2}$, ainsi $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

$$\boxed{y(x)=Ce^{-2x}+\frac{1}{4}\text{ sont les solutions de (E).}}$$

1 pt **3** Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $(0;1)$. f est une solution de (E) donc $f(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}$

$(0;1) \in C_f \iff f(0) = 1 \iff Ce^0 + \frac{1}{4} = 1 \iff C = 1 - \frac{1}{4} \iff C = \frac{3}{4}$

$$\boxed{\text{La solution cherchée est définie par } f(x) = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}}$$

Partie B On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$

1 pt **1** Déterminer la dérivée g $g'(x) = \frac{3}{4} \times (-2)e^{-2x} = -\frac{3}{2}e^{-2x}$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x}}$$

1 pt **2** Prouver que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que pour tout réel x on a $e^{-2x} > 0$ et donc $-\frac{3}{2}e^{4x} < 0$.

Comme la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$; g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

1 pt **3** Quelle est la limite de g en $+\infty$. En $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} \exp(t) = 0 \end{array}\right\} \text{par composée } \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{4}e^{-2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}}$$

1 pt **4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 2$

$g(x) = 2 \iff \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4} = 2 \iff \frac{3}{4}e^{-2x} = \frac{7}{4} \iff e^{-2x} = \frac{7}{3}$

$g(x) = 2 \iff e^{-2x} = \frac{7}{3} \iff \ln\left(e^{-2x}\right) = \ln\left(\frac{7}{3}\right) \iff -2x = \ln\left(\frac{7}{3}\right) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{-2}$

$$\boxed{S = \left\{-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)\right\}}$$

Exercice 4 — *10 points*

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel.
Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1 pt **1** Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
On calcule $f(0,5) = 35e^{-1,6\times0,5} - 30 = 35e^{-0,8} - 30 \approx -14,3$

$$\boxed{\text{La température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes sera d'environ -14 °C}}$$

2 pts **2** Étudier le sens de variation de la fonction f.
On calcule la dérivée et on étudie son signe :

$$f'(t) = 35 \times (-1,6)e^{-1,6t} = -56e^{-1,6t}$$

On a utilisé la formule de dérivation :

$$(e^u)' = u'e^u$$

Signe de la dérivée : La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ on déduit que pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a $f'(t) < 0$

La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

1 pt **3** Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
$f(1,5) \approx -26,8C$

La température des ailerons sera conforme au cahier des charges car inférieure ou égale à -24 °C

1.5 pt **4** Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

$$\begin{aligned} f(t) = -24 &\iff 35e^{-1,6t} - 30 = -24 \\ &\iff 35e^{-1,6t} = 6 \\ &\iff e^{-1,6t} = \frac{6}{35} \\ &\iff -1,6t = \ln\left(\frac{6}{35}\right) \qquad \text{en appliquant la fonction } \ln \\ &\iff t = \frac{\ln\left(\frac{6}{35}\right)}{-1,6} \\ &\iff t \approx 1,10h \end{aligned}$$

La température des ailerons atteindra -24 °C et sera donc conforme au cahier des charges au bout de 1h et 6 minutes et 9 secondes.

PARTIE B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$

2 pts **1** Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.
L'équation différentielle $y' + l,5y = -52,5$ se met sous la forme $y' = 1,5y - 52,5$.
Elle est du type $y' = ay + b$ où $a = -1,5$ et $b = -52,5$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, soit ici
$g(t) = Ce^{-1,5t} - 35$ où C désigne une constante réelle quelconque.

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = Ce^{-1,5t} - 35$ où C désigne une constante réelle quelconque.

0.5 pt **2** **a.** Justifier que $g(0) = 5$.
$g(0) = 5$ car l'instant $t = 0$, les ailerons, sont à une température de 5 °C.

1 pt **b.** Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.

$$g(0) = 5 \iff Ce^{-1,5\times 0} - 35 = 5$$
$$g(0) = 5 \iff Ce^{0} - 35 = 5$$
$$C = 40$$

La fonction g est définie par $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$

1 pt **3** Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?
On résout $g(t) = -24$

$$\begin{aligned} g(t) = -24 \quad &\iff 40e^{-1,5t} - 35 = -24 \\ &\iff 40e^{-1,5t} = 11 \\ &\iff e^{-1,5t} = \frac{11}{40} \\ &\iff -1,5t = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \qquad \text{en appliquant la fonction } \ln \\ &\iff t = \frac{\ln\left(\frac{11}{40}\right)}{-1,5} \\ &\iff t \approx 0,86h \approx 52\,min \end{aligned}$$

Ce nouveau tunnel permet une congélation plus rapide.