Nom :	DS 06	TSTI2D Oiselet	Janv. 2023
Prénom :		Devoir n° 11	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 9 points

9 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 30 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué* $1,5$ *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Dans les questions 1. et 2., on considère les nombres complexes $z_1 = 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

1 La forme exponentielle de $z_1 \times z_2$ est :

a. $12e^{i\frac{\pi}{12}}$ **b.** $12e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **c.** $12\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

2 La forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ **b.** $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **c.** $3e^{i\frac{\pi}{6}}$

Dans les questions 3. et 4., on considère les nombres complexes $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3 La forme algébrique de z est :

a. $-3-3i$ **b.** $-3+3i$ **c.** $3+3i$

4 Le nombre complexe z' est :

a. l'opposé de z **b.** le conjugué de z **c.** l'inverse de z

5 Si $z_3 = \sqrt{3} - i$ alors le module de z_3 et un argument de z_3 sont respectivement :

a. 2 et $\dfrac{\pi}{3}$ **b.** $\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$ **c.** 2 et $-\dfrac{\pi}{6}$

6 Si $z_4 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors z_4^3 est :

a. un réel positif **b.** égal à $27i$ **c.** égal à -27

Exercice 2 — 2 points

Soit le nombre complexe $z = 4 - 3i$. Compléter :

2 pts

$$\mathfrak{Re}(z) = 4; \mathfrak{Im}(z) = -3; |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Exercice 3 — 1 point

1 pt On donne $Z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

Compléter :

$$|z| = 3 \quad \mathbf{Arg}(Z) = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 4 — 2,5 points

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

2.5 pts

$$z_1 = \frac{2+i}{3-2i} \quad ; \quad z_2 = (-2+3i)(1+i)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2+i}{3-2i} \\ &= \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \\ &= \frac{6+4i+3i-2}{(3^2+2^2)} \\ &= \frac{4+7i}{13} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= (-2+3i)(1+i) \\ &= -2-2i+3i+3i^2 \\ &= -2-3+i \\ &= -5+i \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 = \frac{4+7i}{13} \text{ et } z_2 = -5+i}$$

Exercice 5 — 2 points

Calculer le module des nombres complexes suivants :

2 pts

$$z_1 = \frac{1}{2} + 2i \quad ; \quad z_2 = i(1-i)$$

$$\begin{aligned} |z_1| &= \left|\tfrac{1}{2} + 2i\right| \\ &= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4} + 4} \\ &= \sqrt{\tfrac{17}{4}} \\ |z_1| &= \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= i(1-i) \\ &= i - i^2 \\ &= 1 + i \\ |z_2| &= |1+i| \\ &= \sqrt{2} \\ |z_2| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour calculer le module de z_2 , on a intérêt à utiliser les propriétés des modules :

$$\begin{aligned} |z_2| &= |i(1-i)| \\ &= |i| \times |(1-i)| && \text{car } |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ &= \sqrt{0^2+1^2} \times \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 6 — 6,5 points

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1-i$, $z_B = -2+i$ et $z_C = 3+2i$.

1 pt **1** Placer dans le repère dessiné sur le verso de la feuille les points A, B et C :

2 pts **2** Calculer les distances AB et BC.

$$\begin{array}{ll|ll}
AB & = |z_B - z_A| & AC & = |z_C - z_A| \\
 & = |-2+i-(1-i)| & & = |3+2i-(1-i)| \\
 & = |-2+i-1+i| & & = |3+2i-1+i| \\
 & = |-3+2i| & & = |2+3i| \\
 & = \sqrt{3^2+2^2} & & = \sqrt{2^2+3^2} \\
AB & = \sqrt{13} & AC & = \sqrt{13}
\end{array}$$

2 pts **3** Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\begin{aligned}
ABCD \text{ est un parallélogramme} & \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\
& \iff z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \\
& \iff z_B - z_A = z_C - z_D \\
& \iff z_D = z_C - z_B = z_A \\
& \iff z_D = 3+2i-(-2+i)+1-i \\
& \iff z_D = 3+2i+2-i+1-i
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'affixe du point } D \text{ tel que } ABCD \text{ soit un parallélogramme est } z_D = 6.}$

1.5 pt **4** Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AB]$. Placer le point I sur la figure précédente.

$$\begin{aligned}
z_I & = \frac{1}{2}(z_A + z_B) \\
& = \frac{1}{2}(1-i-2+i) \\
& = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le point } I \text{ milieu de } [AB] \text{a pour affixe } z_I = -\frac{1}{2}, \text{ donc } I\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}}$

Exercice 7 — 6 points

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 pts **1** Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

Module

$$\begin{aligned}
|z| & = \sqrt{a^2+b^2} \\
& = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} \\
& = \sqrt{4} \\
& = 2
\end{aligned}$$

Argument

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{1}}{2} \end{cases}$$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$ convient

$$\boxed{z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

1 pt **2** Ecrire z_2 sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1+i \end{aligned}$$

$$\boxed{z_2 = 1 = i}$$

1 pt **3** Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_1 \times z_2$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

1 pt **4** Ecrire $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique.

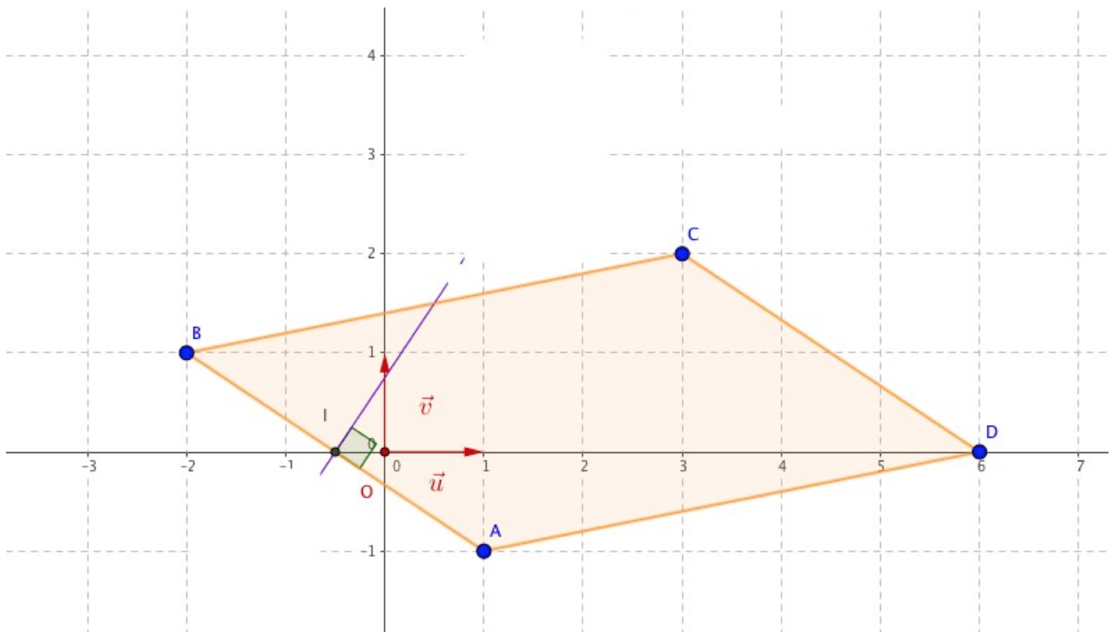
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (\sqrt{3}-i)(1+i) \\ &= \sqrt{3}+i\sqrt{3}-i-i^2 \\ &= 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = (1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)}$$

1 pt **5** En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
On utilise les deux formes algébrique et trigonométrique de $z_1 \times z_2$:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$



✄ ✄

A rendre au bout de 30 minutes.

Nom :	**DS 06**	TSTI2D OISELET	*Janv. 2023*
Prénom :		*Devoir n° 11*	.../...

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6
Réponse	b	a	b	b	c	b