Nom :	**DS 09**	TMATHS OISELET — Devoir n° 18	Avril 2023
Prénom :	CASE DES MATHS		.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 10,5 points

Calculer les intégrales suivantes

1 pt • $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\, dx$

1.5 pt $I_2 = \displaystyle\int_2^1 \frac{1}{t^4}\, dt$

2 pts • $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (4t+1)^3\, dt$

2 pts • $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\, dx$

2 pts • $I_5 = \displaystyle\int_1^2 x^2 e^{x^3}\, dx$

2 pts • $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$

Exercice 2 — 8,5 points

Calculer les intégrales suivantes au moyen d'une intégration par parties suivie d'une seconde s'il le faut :

2.5 pts $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\, dx$

2.5 pts $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x e^{-2x}\, dx$

3.5 pts $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (x-2)^2 e^{2x}\, dx$

Exercice 3 — 2 points

2 pts Démontrer l'encadrement suivant

$$1 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4}\, \mathrm{d}x \leq 5$$

Exercice 4 — 6 points

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

2 pts **1** Démontrer que la suite (J_n) est décroissante.

1 pt **2** Justifier que, pour tout t vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}$.

2 pts **3** En déduire que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

1 pt **4** Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 5 — 7 points

On considère les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x\,dx$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x\,dx$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x)\,dx$

1 pt **1** Calculer $I + J$

2 pts **2** Démontrer que $I - J = -K$

2 pts **3** Montrer que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2 \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

1 pt **4** Démontrer que $K = -\dfrac{\pi}{4}$

1 pt **5** Déduire des questions précédentes la valeur exacte de I.