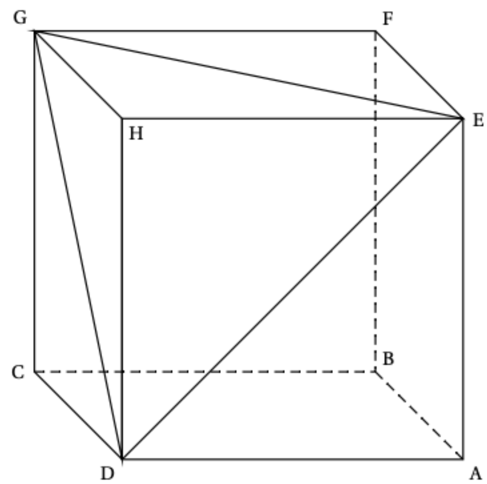
Nom : .... *Prénom :*	**DS 07** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Mars 2023* *Devoir n° 14* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — 14 points

14 pts On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{B}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{BA}},\,\overrightarrow{\mathrm{BC}},\,\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right)$.

1 Déterminer les les coordonnées des points B,H,D,E,G dans ce repère.
On a $\mathrm{B}(0\,;0\,;0)$, $\mathrm{H}(0\,;1\,;1)$, $\mathrm{D}(1\,;1\,;0)$, $\mathrm{E}(1\,;0\,;1)$ et $\mathrm{G}(0\,;1\,;1)$.

2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
Le point H a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.

$$M \in (\mathrm{BH}) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{\mathrm{B}M} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& t(1-0)\\ y-0 &=& t(1-0)\\ z-0 &=& t(1-0)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t\end{array}\right.$$

3 Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
On a $\mathrm{D}(1\,;1\,;0)$, $\mathrm{E}(1\,;0\,;1)$ et $\mathrm{G}(0\,;1\,;1)$.
D'où $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(0\,;\,-1\,;\,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}(-1\,;\,0\,;\,1)$.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{BH}}(1\,;\,1\,;\,1)$ ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG).
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

4 Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
D'après la question précédente une équation du plan (DEG) est :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{DEG}) \iff 1x+1y+1z+d=0$.
On a par exemple $\mathrm{D} \in (\mathrm{DEG}) \iff 1+1+0+d=0 \iff d=-2$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{DEG}) \iff x+y+z-2=0$.

5 On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (BH) et l'équation du plan (DEG) soit :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= t \\ x+y+z-2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow 3t-2=0 \iff t=\frac{2}{3}.$$

On a donc $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

6 Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

$\mathrm{PD}^2=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2$;

$\mathrm{PE}^2=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2$;

$\mathrm{PG}^2=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2$.

On a donc de façon évidente $\mathrm{PD}^2=\mathrm{PE}^2=\mathrm{PG}^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, soit PD = PE = PG.

Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle (DEG), c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (DEG), mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral (DEG).

Exercice 2 — 6 points

6 pts Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x)=2x^3+3x^2+4x-2$

> Une primitive de la fonction f est la fonction F définie par $F(x)=\frac{x^4}{2}+x^3+2x^2-2x$

2 $g(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}$ On a $f(x)=\frac{1}{x^2}+3x^{-4}$

Donc F une primitive de f est définie par $F(x)=-\frac{1}{x}+3\times\frac{x^{-4+1}}{-4+1}$

> Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$

3 $h(x)=(-2x+5)^4$

On pose $u=-2x+5$ alors $u'=-2$.

On a alors $f=-\frac{1}{2}u'u^4$, donc $F=-\frac{1}{2}\frac{u^{4+1}}{4+1}=-\frac{1}{10}u^5$

> Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-\frac{1}{10}(-2x+5)^5$

4 $k(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

On pose $u=x^2+x+1$ alors $u'=2x+1$.

On a alors $f=\frac{u'}{u}$, donc $F=\ln|u|$

> Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\ln|x^2+x+1|$

5 $\ell(x)=e^{3x+1}$

On peut écrire $f(x)=\frac{1}{3}\times 3e^{3x}$

On pose $u=3x$ alors $u'=3$.

On a alors $f=\frac{1}{3}\times u'e^u$, donc $F=\frac{1}{3}e^u$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x}$

6 $m(x) = 2\cos(3x) + 5\sin(2x)$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2\dfrac{\sin(3x)}{3} + 5\dfrac{\cos(2x)}{-2} = \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{5}{2}\cos(2x)$