Nom : .... *Prénom :*	**DS 05** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Janv. 2022* *Devoir n° 10* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *5 points*

5 pts Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,014\,65$.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
   b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

Exercice 2 — *10 points*

10 pts Déterminer les limites suivantes en a :

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$; $a = -\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{3e^x - x^2 + 2}{x^2}$; $a = +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{-7x+14}$; $a = 2^-$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+\cos x}{x+7}$; $a = +\infty$.

Exercice 3 — 16,5 points

16.5 pts On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On calculera les limites aux bornes.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
3. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f. On montrera que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 4 — 9 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1 pt **1** Les fonction f et g sont définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 4x\ln x - 4x$ et $g(x) = \dfrac{4}{x} - 4$

Affirmation 1 : la fonction g est la dérivée de la fonction f.

1.5 pt **2** **Affirmation 2** :

$$\ln(5e) + \ln(35) - \ln\left(7\sqrt{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln 5 - \frac{1}{2}$$

1.5 pt **3** **Affirmation 3** : L'inéquation $e^{-4x+3} > 2$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3-\ln 2}{4};+\infty\right[$

5 pts **4** **Affirmation 4** : La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 7\ln x - 2x + 1$ a pour tableau de variation :

x	0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$7\ln 7 - 7\ln 2 - 6$	$\searrow$	$-\infty$

Attention, toutes les informations du tableau doivent être justifiées.