Nom : ....

Prénom : ....

DS 05

CASE DES MATHS

TMATHS OISELET

Devoir n° 10

Janv. 2022

.../...

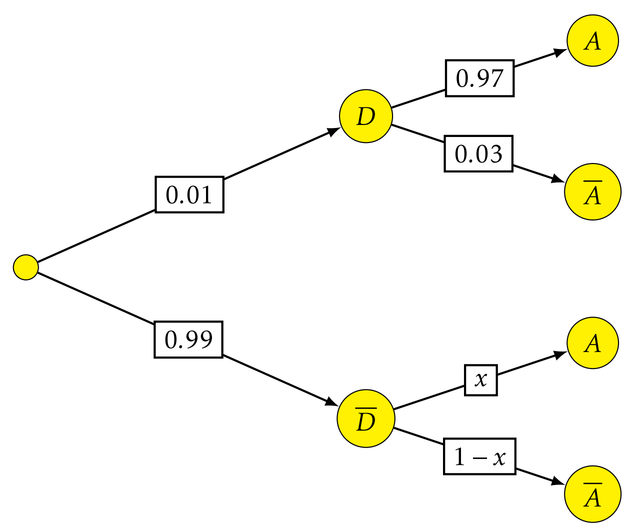
Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *0 point*

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,01465$.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1 Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.



2 **a.** La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
$P(D \cap A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$.

b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \approx 0,662$.

3 La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :

$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$.

On sait que $P(A) = 0,01465$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.

On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01465 - 0,0097 = 0,00495$.

Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,00495}{0,99} = 0,005$.

4 On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Cette situation est représentée par les événements $D\cap\overline{A}$ et $\overline{D}\cap A$.
La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :
$P\left(D\cap\overline{A}\right)+P\left(\overline{D}\cap A\right)=0,01\times 0,03+0,99\times 0,005=0,005\,25<0,01.$

Exercice 2 — 10 points

10 pts Déterminer les limites suivantes en a :

1 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$; $a=-\infty$.

$$f(x)\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1\end{array}\right\}\quad\text{Par quotient }\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=1\end{array}\right\}\quad\text{Par produit }\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

2 $f(x)=\dfrac{3e^x-x^2+2}{x^2}$; $a=+\infty$.

On écrit $f(x)=3\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}=3\dfrac{e^x}{x^2}-1+\dfrac{2}{x^2}$

D'après une limite de référence, pour tout entier n on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$, donc :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}3\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-1+\dfrac{2}{x^2}=-1\end{array}\right\}\quad\text{Par somme }\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{-7x+14}$; $a=2^-$.
On étudie le signe du dénominateur :

- $-7x+14=0\iff -7x=-14=0\iff x=2$
- En appliquant la règle sur le signe des fonctions affines, on obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $(-7x+14)$		+	0	-	

✗ En 2^- :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}x^2+x-1=5\\ \lim\limits_{x\to2^-}-7x+14=0^+\quad\text{Par inverse }\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{-7x+14}=+\infty\end{array}\right\}\quad\text{Par produit }\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$$

4 $f(x)=\dfrac{2x+\cos x}{x+7}$; $a=+\infty$.

On écrit $f(x)=\dfrac{x\left(2+\dfrac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{7}{x}\right)}=\dfrac{\left(2+\dfrac{\cos x}{x}\right)}{\left(1+\frac{7}{x}\right)}$

Pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$
En divisant par $x > 0$, légitime lorsque x tend vers $+\infty$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes s'applique, on a ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{\cos x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{7}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Exercice 3 — 16,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

4 pts **1** Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On calculera les limites aux bornes.

- Dérivée : g est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$$g = uv - 1$$

Ainsi $g' = u'v + v'u$.
Pour tout réel x : $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x \\ v(x) & = e^x \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 1 \\ v'(x) & = e^x \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^x + e^x \times x \\ &= (1+x)e^x \end{aligned}$$

- Signe de la dérivée : La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $g'(x)$ a :le signe de $x+1$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff x + 1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff x + 1 > 0 \\ &\iff x > -1 \end{aligned}$$

- Limites aux bornes :
  - ♡ En $+\infty$:
    $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty \text{ puis } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$
  - ♡ En $-\infty$:
    D'après une limite usuelle : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc
    $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

2 Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-1	$\searrow$	$-1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 pts **3** Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

- Sur $I=[-1;+\infty[$: D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I=[-1;+\infty[$.
  - ✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $I=[-1;+\infty[$.
  - ✍ $g(-1)=-1-\mathrm{e}^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
  - ✍ g réalise donc une bijection de $[-1;.+\infty[$ sur $\left[-1-\mathrm{e}^{-1};+\infty\right[$

    Comme $0\in\left[-1-\mathrm{e}^{-1};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=0$ a une racine unique α dans $[-1;+\infty[$.
- Sur $J=]-\infty;-1]$, on a : $\left.\begin{array}{l} x<0 \\ \mathrm{e}^x>0 \end{array}\right\}$ Par produit $x\mathrm{e}^x<0$ puis en ajoutant -1, $x\mathrm{e}^x-1<-1<0$.

  Ainsi $g(x)<0$ sur $J=]-\infty;-1]$, donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur $J=]-\infty;-1]$.

0.25 pt **4** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
Avec une calculatrice, on obtient $g(0,56)\approx-0,02$ et $g(0,57)\approx 0,008$.

$$\boxed{0,56<\alpha<0,57}$$

0.25 pt **5** Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$		$+$	
Variations de g	$-1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Par ailleurs on a montré que $g(x)<0$ sur $J=]-\infty;-1]$. On déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Partie B :

4 pts **1** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

- En $-\infty$: on débouche sur la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
  On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right) = -1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1}$$

- En $+\infty$: on débouche sur la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
  On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} \end{aligned}$$

  D'après une limite de référence on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$; par inverse, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

1 pt **2** Interpréter graphiquement les résultats précédents.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

2 pts **3** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f. On montrera que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$$

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= x+1 \\ v(x) &= \mathrm{e}^x - x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \mathrm{e}^x - 1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\times(\mathrm{e}^x-x)-(\mathrm{e}^x-1)(x+1)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x-x-(x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-x-1)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x-x-x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+x+1}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\\
&= \frac{-x\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\\
&= -\frac{x\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\\
&= -\frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}
\end{aligned}
$$

2 pts **4** Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Le dénominateur est le carré d'un réel non nul, il est donc strictement positif, ainsi, $f'(x)$ a le signe de $-g(x)$,
On déduit le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

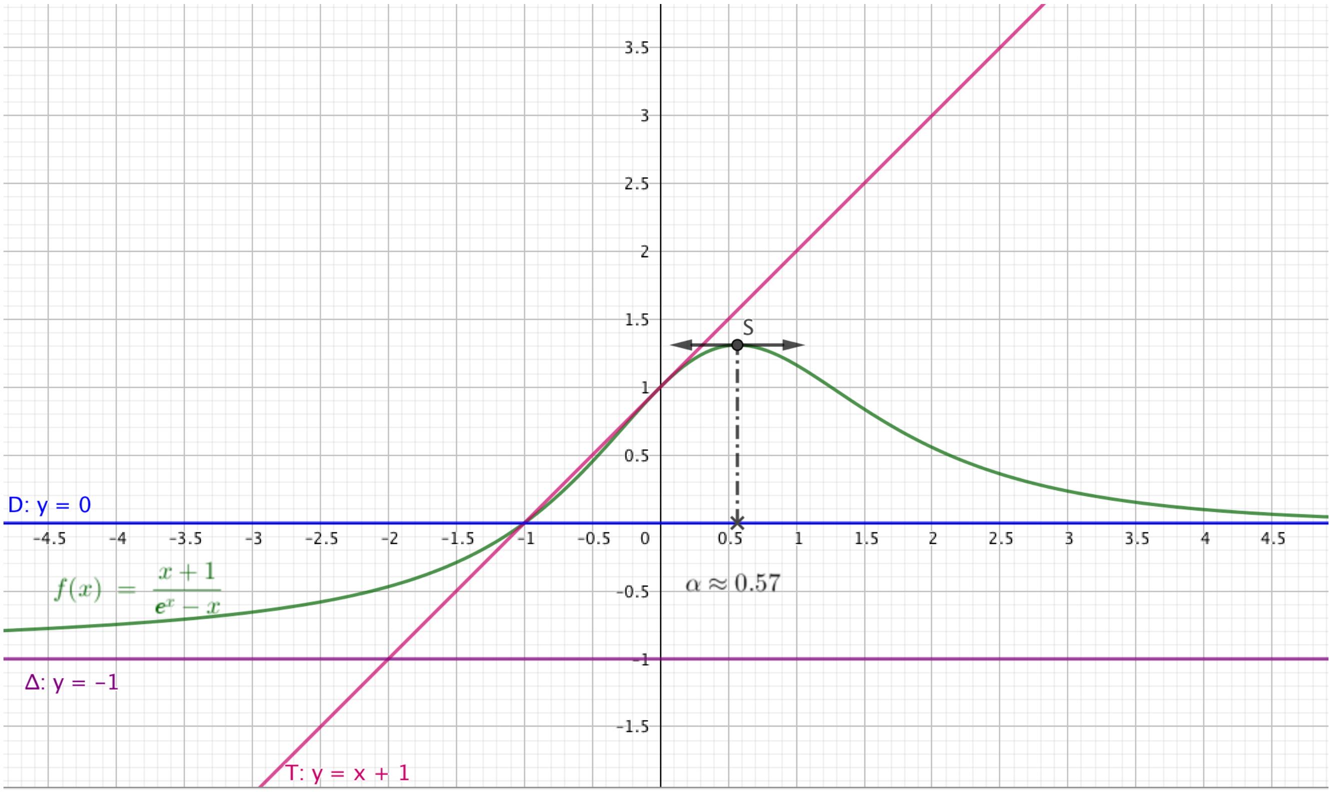
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

1 pt **5** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

T a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

- ✏ $f'(0) = -g(0) = 1$
- ✏ $f(0) = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 1(x-0)+1, \text{ soit } y = x+1}$$



Exercice 4 — 9 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1 pt **1** Les fonction f et g sont définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 4x\ln x - 4x$ et $g(x) = \dfrac{4}{x} - 4$

Affirmation 1 : la fonction g est la dérivée de la fonction f.

On écrit $f(x) = 4x(\ln x - 1)$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 4x \\ v(x) &= \ln x - 1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 4 \\ v'(x) &= \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times 4x \\ &= 4\ln x - 4 + 4 \\ &= 4\ln x \\ &\neq g(x) \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est fausse.

1.5 pt **2** **Affirmation 2** :

$$\ln(5e) + \ln(35) - \ln\left(7\sqrt{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln 5 - \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(5e)+\ln(35)-\ln\left(7\sqrt{e}\right)+\ln\left(\frac{1}{e}\right) &= \ln 5+\ln e+\ln 5+\ln 7-\ln 7-\ln\sqrt{e}-\ln e && \text{car } \ln(ab)=\ln a+\ln b \\
& && \text{et } \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a \\
&= 2\ln 5+1-\frac{1}{2}\ln e-1 && \text{car } \ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a \text{ et } \ln e=1 \\
&= 2\ln 5-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

L'affirmation 2 est vraie.

1.5 pt **3** **Affirmation 3 :** L'inéquation $e^{-4x+3}>2$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S}=\left]\frac{3-\ln 2}{4};+\infty\right[$

$$
\begin{aligned}
e^{-4x+3}>2 &\iff \ln\left(e^{-4x+3}\right)>\ln 2 && \text{En appliquant la fonction ln strictement croissante sur }]0;+\infty[\\
&\iff -4x+3>\ln 2 && \text{car } \ln(e^x)=x \\
&\iff -4x>\ln 2-3 \\
&\iff x<\frac{3-\ln 2}{4} && \text{en divisant par } -4<0
\end{aligned}
$$

$\mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{3-\ln 2}{4}\right[$

L'affirmation 3 est fausse.

5 pts **4** **Affirmation 4 :** La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=7\ln x-2x+1$ a pour tableau de variation :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$7\ln 7-7\ln 2-6$	$\searrow$	$-\infty$

Attention, toutes les informations du tableau doivent être justifiées.

✗ Dérivée :
$f(x)=7\ln x-2x+1$, donc $f'(x)=7\times\frac{1}{x}-2=\frac{7-2x}{x}$

✗ Signe de la dérivée :

- Sur $]0;+\infty[$, on a $x>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $7-2x$.
- $f'(x)=0 \iff 7-2x=0 \iff x=\frac{7}{2}$

x	0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
signe de $(7-2x)$		$+$	0	-	
signe de x		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	-	

✗ Limites aux bornes :

- En $+\infty$: on écrit $f(x) = x\left(7\dfrac{\ln x}{x} - 2 + \dfrac{1}{x}\right)$

  D'après une limite de référence $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 7\dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2+\dfrac{1}{x} = -2 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 7\dfrac{\ln x}{x} - 2 + \dfrac{1}{x} = -2$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 7\dfrac{\ln x}{x} - 2 + \dfrac{1}{x} = -2 = -2 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

- En 0^+ : $f(x) = 7\ln x - 2x + 1$

  $$\left.\begin{array}{r} \text{d'après une limite usuelle } \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to0^+} 7\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} -2x+1 = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

- Tableau de variation : $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 7\ln\left(\dfrac{7}{2}\right) - 2\left(\dfrac{7}{2}\right) + 1 = 7(\ln 7 - \ln 2) - 7 + 1 = 7\ln 7 - 7\ln 2 - 6$