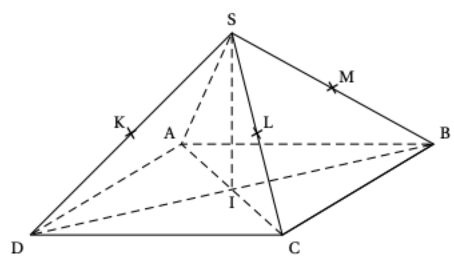
Nom : .... *Prénom :*	**DS 04** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Déc. 2022* *Devoir n° 08* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *6 points*

6 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
Une réponse exacte rapporte 1,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1 Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

- (DK et (SK) faux, elles ont le point K en commun.
- (AS) et (IC) faux, elles ont le point A en commun.
- (AC) et (SB). Vrai. Les points A, C et B appartiennent au plan (ABC) et S est en dehors de ce plan.
- (LM) et (AD), faux, elles sont parallèles et appartiennent au plan ADLM.

La bonne réponse est c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2 Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

✍ K milieu de [SD] ; K(0 ; -0,5 ; 0,5) ;

✍ L milieu de [SC] ; L(0,5 ; 0 ; 0,5) ;

✍ N milieu de de [KL] (0,25 ; -0,25 ; 0,5) ;

La bonne réponse est b.

3 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}x_S-x_A\\y_S-y_A\\z_S-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\\0-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

La bonne réponse est b.

4 Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1-t\\y&=&t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&t\\y&=&0\\z&=&1+t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1-t\\y&=&1+t\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(AS) &\iff \overrightarrow{SM}=t\overrightarrow{AS}\\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}x=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}x=t\\y=0\\z=1+t\end{array}\right.\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

Exercice 2 — 13 points

13 pts On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=0,95u_n+200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2=9\,415$.

✓ $u_1=0,95u_0+200=0,95\times10\,000+200=9700$

✓ $u_2=0,95u_2+200=0,95\times9\,700+200=9415$

2 **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n>4\,000.$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n>4\,000$ ».

✍ ***Initialisation :***
$u_0 = 10\,000$ et $10\,000 > 4\,000$
Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 4\,000$(HR)
En multipliant par $0,95 > 0$, on obtient : $0,95u_k > 0,95 \times 4\,000$
Puis en ajoutant 200, on obtient : $0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200$
soit $u_{k+1} > 4\,000$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n > 4\,000$ ».

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
Comme tout entier naturel n :$u_n > 4\,000$, (u_n) est minorée par $4\,000$.
(u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

3 Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.
$v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$

$$\boxed{v_0 = 6\,000}$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4\,000 \\ &= 0,95u_n + 200 - 4\,000 \\ &= 0,95u_n - 38\,000 \\ &= 0,95\,(u_n - 4\,000)\,\text{car } 0,95 \times 4\,000 = 3\,800 \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme pour tout entier } n,\ v_{n+1} = 0,95v_n\,;\ \text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison égale à } 0,95.}$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

✍ La suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95, donc $v_n = q^n \times v_0 = 6\,000 \times 0,95^n$.

✍ De l'égalité $v_n = u_n - 4\,000$, on déduit : $u_n = v_n + 4\,000$.

✍ Ainsi, on déduit $u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n$

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
Comme $-1 < 0,95 < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$,
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000 = 4\,000$

$$\boxed{\text{On a donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 4\,000}$$

4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

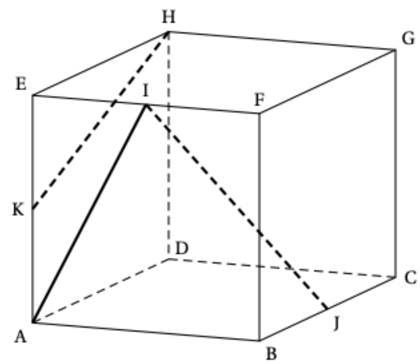
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.
u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 3 — 13,5 points

13.5 pts

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1 Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}\\ &= \overrightarrow{AE} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KH} &= \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EH}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\0,5\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Comme $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{0,5}$, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas colinéaires, ainsi les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

2 Donner les coordonnées des points I et J.
On a :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc $I\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } I\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix}1\\0,5\\0\end{pmatrix}}$$

3 Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires ssi $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $vv\mathrm{AE}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
Soit à prouver qu'il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = x\overrightarrow{\mathrm{AE}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = x\overrightarrow{\mathrm{AE}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}} &\iff \begin{pmatrix}1-0,5\\0,5-0\\0-1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}y = 0,5\\ y = 0,5\\ x = -1\end{cases}\end{aligned}$$

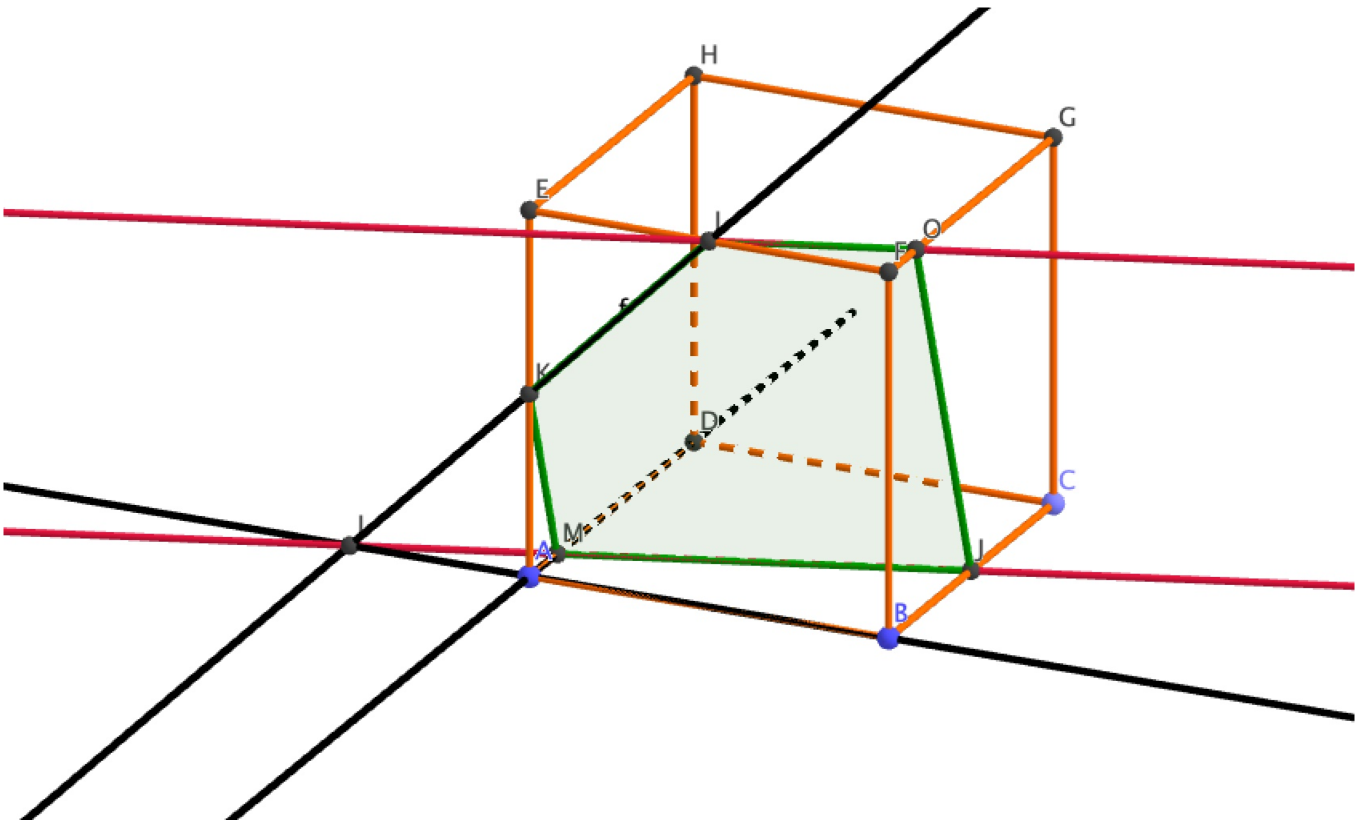
$$\boxed{\text{Ainsi } \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AE}} + 0,5\overrightarrow{\mathrm{AC}}\text{, ce qui prouve que les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{IJ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AC}} \text{ sont coplanaires.}}$$

4 Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK).

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (IJK) &\iff \overrightarrow{IM} = s\overrightarrow{IJ} + t\overrightarrow{IK}\\ &\iff \begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } (IJK) \text{ est } \begin{cases}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t\\ y = \quad \frac{1}{2}s\\ z = 1 - s - \frac{1}{2}t\end{cases}}$$

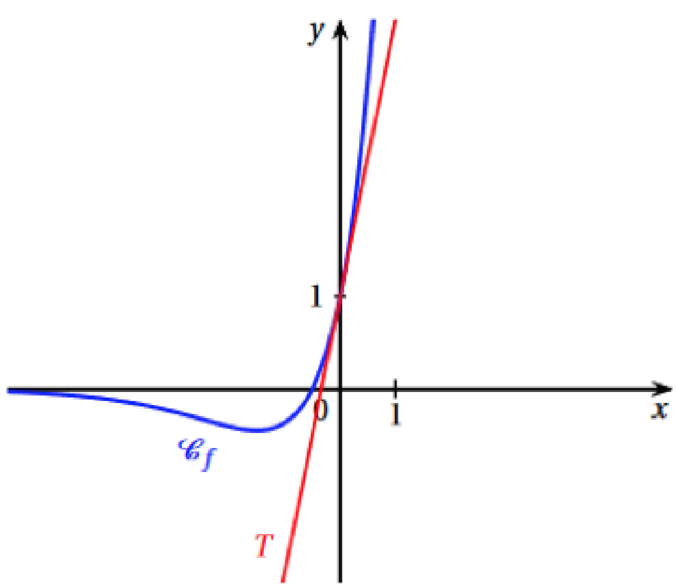
5 Construire en vert la section du cube ABCDEFGH sur la figure ci-dessous avec le plan (IJK), on laissera les traits de construction.



Exercice 4 — 9 points

9 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$.
Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite T , tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1 Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
On résout l'équation $f(x) = 0$.
La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x+1=0 \\ &\iff 2x = -1 \\ &\iff x = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ rencontre l'axe des abscisses en } A(-\tfrac{1}{2}; 0)}$

2 Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = (2x+3)e^x$.
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 2x+1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x + e^x(2x+1) \\ &= e^x(2+2x+1) \\ &= (2x+3)e^x \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a donc bien établi que pour tout réel } x, \text{ on a } f'(x) = (2x+3)e^x.}$

3 Dresser le tableau de signes de $f'(x)$, puis préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le signe de $2x+3$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2x+3 > 0 \\ &\iff 2x > -3 \\ &\iff x > -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-\frac{3}{2}) = (2 \times (-\frac{3}{2}) + 1)e^{-\frac{3}{2}} = -2e^{-\frac{3}{2}}$$

- f est strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right]$
- f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

4 **a.** Déterminer l'équation réduite de la tangente T.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
✏ $f'(0) = 3e^0 = 3$
✏ $f(0) = e^0 = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 3(x-0)+1, \text{ soit } y = 3x+1}$$

b. Justifier graphiquement, que pour tout réel x, on a : $(2x+1)e^x \geq 3x+1$.
Au vu du graphique, on peut affirmer la tangente T est située au dessus de la courbeC_f sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout réel x, on a : $f(x) \geq 3x+1$, soit $(2x+1)e^x \geq 3x+1$.