Nom : .... *Prénom :*	**DS 02** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Oct. 2022* *Devoir n° 04* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *9 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 4 qui sera ramassé 30 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué $1,5$ *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

A. Question 1

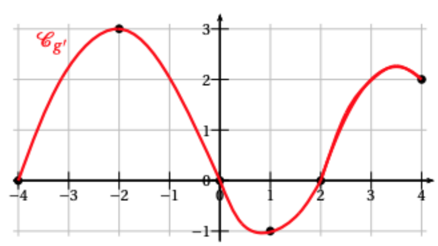
1.5 pt On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$ **b.** $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$ **d.** $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

B. Question 2

1.5 pt

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2. **b.** g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$. **d.** g admet un minimum en 0.

C. Question 3

1.5 pt On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L' équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

D.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right)}{x^3}.$$

Question 4

1.5 pt La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

b. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

Question 5

1.5 pt La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$

c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

Question 6

1.5 pt La fonction f :

a. est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est convexe $]0\ ;\ +\infty[$

c. est concave sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.

Exercice 2 — 7 points

7 pts

On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x) = x^2 + 1; g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x - 4$.

1

a. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de $g \circ f$.

b. Déterminer l'expression de $g \circ f$ puis celle de $(g \circ f)'$

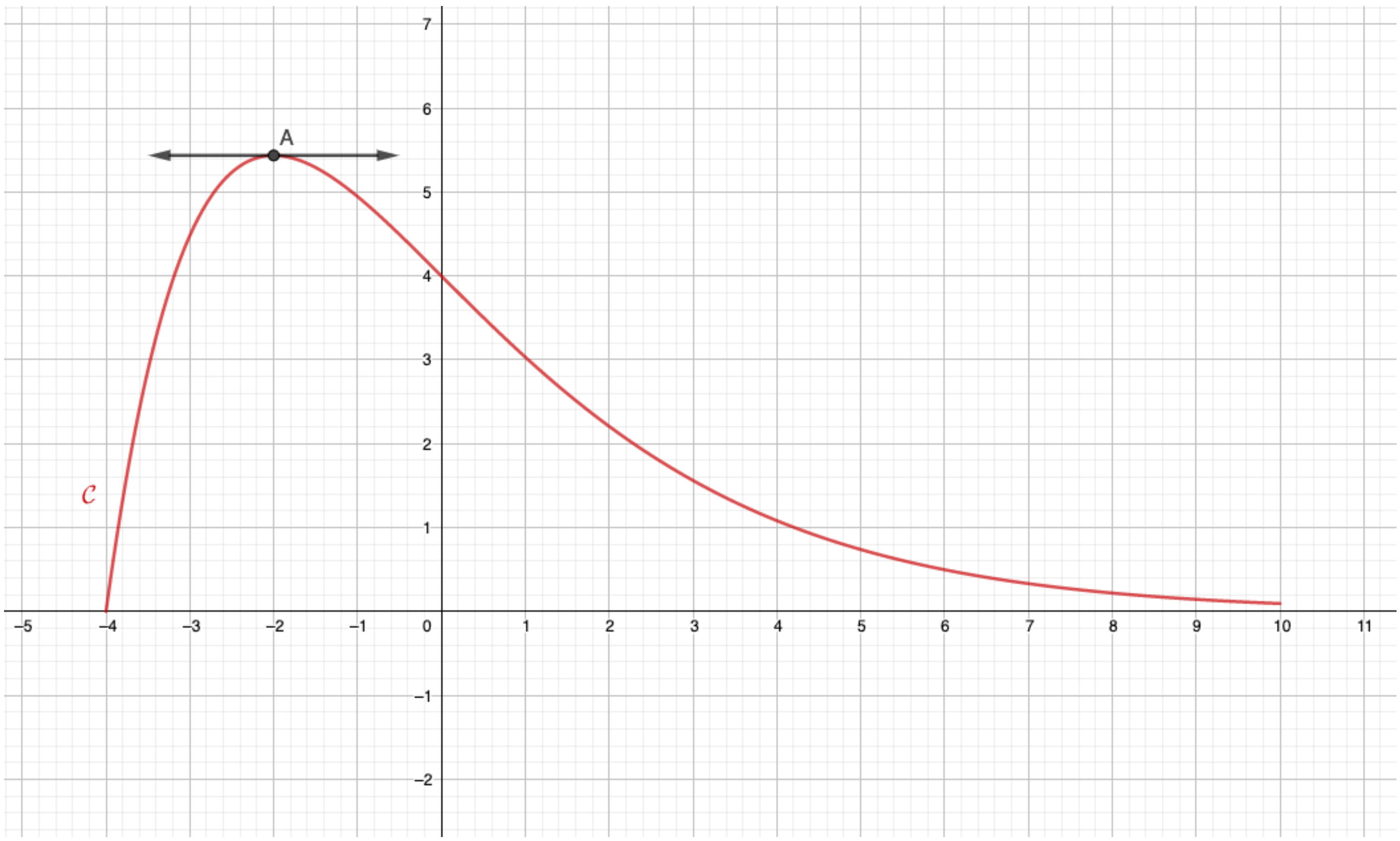
2

a. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de $f \circ h$.

b. Déterminer l'expression de $f \circ h$ puis celle de $(f \circ h)'$

Exercice 3 — 9,5 points

9.5 pts La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4;10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.



PARTIE A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?

PARTIE B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4;10]$ par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. **a.** Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4;10]$.
2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4;10]$.

   b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

Exercice 4 — 15 points

15 pts On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Première partie

Etude d'une fonction annexe :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

1. Dresser en le justifiant le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[-3; 2]$.
3. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie

Etude de la fonction f

1. Démontrer que $f'(x) = xg(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$
4. **Bonus** Donner, en le justifiant, un encadrement de $f(\alpha)$.
5. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à l'axe des abscisses ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

✄ ✄

A rendre au bout de 30 minutes.

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6
Réponse						