Nom : .... Prénom :	**DS 06**	TMATHS Devoir n° 06	Fév. 2022 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 20 points

20 pts

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2), B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), C(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } D(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1 Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

$$\begin{cases} BC^2=(0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2=5 \\ CD^2=(6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2=70 \\ BD^2=(6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2=75 \end{cases} \Longrightarrow BD^2=BC^2+CD^2 \Longrightarrow BCD \text{ est rectangle en } C$$

$$\boxed{BCD \text{ est rectangle en } C.}$$

Son aire est : $\dfrac{BC\times CD}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{14}$.

2 **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=1\times(-2)+0\times3+2\times1=0 \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=6\times(-2)+5\times3+(-3)\times1=0$$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (BCD est un triangle rectangle non aplati), $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD). Équation cartésienne du plan (BCD) :

- L'équation est de la forme $-2x+3y+z+d=0$;
- B appartient au plan, donc $-2(-1)+3(1)+(0)+d=0 \Longleftrightarrow d=-5$;
- une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x+3y+z-5=0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (BCD) \text{ est : } -2x+3y+z-5=0.}$$

3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
Représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur $\vec{n}$) et passant par le point A :

$$\begin{cases} x=5-2t \\ y=-5+3t \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

4 Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + (2 + t) - 5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2(2) = 1 \\ y = -5 + 3(2) = 1 \\ z = 2 + 2 = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les coordonnées de } H \text{ sont : } (1\ ;\ 1\ ;\ 4).}$$

5 Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.

$[AH]$ est la hauteur du tétraèdre issue de A, car A est sur la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de $\mathcal{D}$ et (BCD), donc la projection orthogonale de A sur (BCD).

$\mathcal{B} = 5\sqrt{7}$; $h = AH = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{14}$; donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{14} \times \frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{70}{3}$$

6 On admet que $\text{AB} = \sqrt{76}$ et $\text{AC} = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix};\ AB = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\ AB = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (0)^2} = \sqrt{61};$$

$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{(-6)\times(-5)+6\times6+(-2)\times0}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \simeq 0,97 \Longrightarrow$

$$\boxed{\text{mes}\widehat{BAC} \simeq 14,2 \text{ au dixième de degré près}}$$