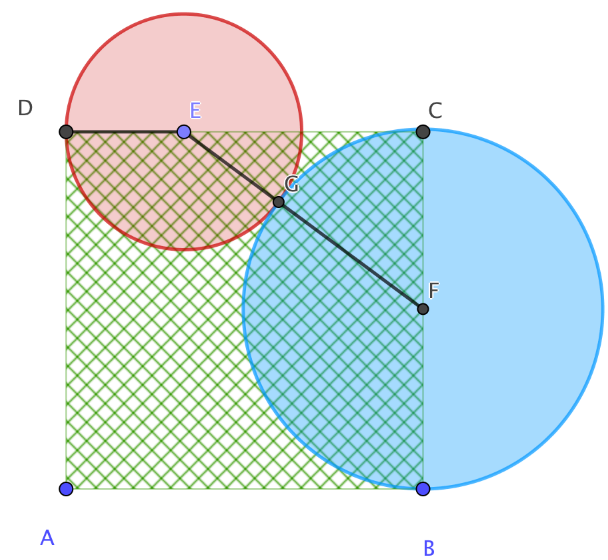
Nom :	DM 01	TMATHS8 Oct. 2021
Prénom :		Devoir n° 03 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Exercice 1



$ABCD$ est un carré de côté 1. E est un point de $[CD]$ et F est un point de $[BC]$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs E et F passent respectivement par les points D et B. Ces deux cercles sont tangents entre eux au point G.
Le but de ce problème est de déterminer la position du point G pour laquelle la distance EF est minimale.
On pose $DE = x$ et $BF = y$

1 Démontrer que $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. En déduire l'expression de EF en fonction de x.
On a clairement : $EF = x + y$, $EC = 1 - x$ et $CF = 1 - y$.
On applique le théorème de Pythagore dans le triangle EFC rectangle en C.

$$\begin{aligned}
EC^2 + CF^2 &= EF^2 \\
(1-x)^2 + (1-y)^2 &= (x+y)^2 \\
1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
2 - 2x &= 2xy + 2y \\
2(1-x) &= 2y(x+1) \\
y &= \frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } y = \frac{1-x}{1+x}}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
EF &= x + y \\
&= x + \frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{x(1+x)}{1+x} + \frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{x + x^2 + 1 - x}{1+x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } EF = \frac{1+x^2}{1+x}}$$

2 On note d la fonction définie par $d(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Etudier les variations de d puis en déduire la position du point G pour que la distance EF soit minimale. Préciser cette distance minimale.

- Dérivée :
  d est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
  $d = \dfrac{u}{v}$ d'où $d' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $[0;1]$:
  $\begin{cases} u(x) &= 1+x^2 \\ v(x) &= 1+x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{2x(1+x) - 1\times(+x^2)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0\,;1]\,;\text{ on a } d'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}}$$

- Signe de la dérivée :
  Le dénominateur de la dérivée est le carré d'un réel non nul ; il est donc strictement positif.
  Etudions le signe du trinôme x^2+2x-1
  $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times 1\times(-1) = 8$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} & &= \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} \\ &= -1+\sqrt{2} & &= -1-\sqrt{2} \end{aligned}$$

  x^2+2x-1 est un trinôme du second degré qui a pour racines $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$; il a donc le signe de $a=1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

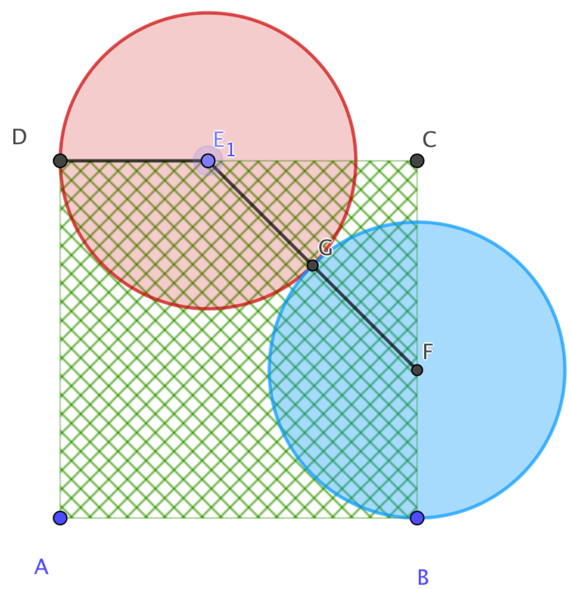
x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de x^2+2x-1		+	0	−	0	+	

- Tableau de variation :

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$d'(x)$		−	0	+	
Variations de f	1	↘	$2(\sqrt{2}-1)$	↗	1

$$d(\sqrt{2}-1)=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)$$

D'après cette étude, d présente un minimum en $x=\sqrt{2}-1$ qui vaut $d(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2}-1)$.La distance $EF=d(x)$ est donc minimale lorsque $x=\sqrt{2}-1$, on a alors $y=\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1=x$.
Cette distance minimale vaut $EF=x+y=2x=2(\sqrt{2}-1)$



3 Etudier la convexité de la fonction d.

✡ Calcul de la dérivée seconde : $d'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$

d' est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $d'=\frac{u}{v}$

d'où $d''=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $[0;1]$: $\begin{cases} u(x) &= x^2+2x-1 \\ v(x) &= (1+x)^2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2x+2 \\ v'(x) &= 2(1+x)\times 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} d''(x) &= \frac{(2x+2)(1+x)^2-2(1+x)(x^2+2x-1)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{(1+x)\left[(2x+2)(1+x)-2(x^2+2x-1)\right]}{(1+x)^4} \\ &= \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x+2}{(1+x)^3} \\ &= \frac{4}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Remarque : on peut simplifier ce calcul !

- $d(x)=x+\frac{1-x}{1+x}=x+\frac{-1-x+2}{1+x}=x-1+\frac{2}{1+x}=x-1+2(1+x)^{-1}$
- $d'(x)=1+2\times(1+x)^{-2}\times 1=1+2\times(1+x)^{-2}$
- $d''(x)=2\times(1+x)^{-3}\times 1=\frac{2}{(1+x)^3}$

✡ Signe de la dérivée seconde :
Pour tout x de $[0\,;1]$; on a $(1+x)>0$ donc $(1+x)^3>0$ et donc $d''(x)>0$

✡ Conclusion :

$$\boxed{\text{Comme } d''(x)>0 \text{ sur } [0\,;1]\text{ ; on déduit que } d \text{ est convexe sur } [0\,;1].}$$

Exercice 2

Soit C_g la courbe représentative dans un repère de la fonction g définie sur $]-\infty;4]$ par :

$$g(x)=-x^3+3x^2-1$$

1 Étudier les variations de la fonction g sur $]-\infty;4]$ et dresser le tableau de variations.

- Dérivée : $g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
- Signe de la dérivée : $g'(x)=0 \iff x=0$ ou $x=2$
  $g'(x)$ est un trinôme du second degré qui a pour racines 0 et 2 ; il a donc le signe de $a=-3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.
- Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-17

2 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 1.
T a pour équation $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

- $g'(1)=3$
- $g(1)=1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y=3(x-1)+1\text{, soit } y=3x-2}$$

3 Étudier la convexité de g et montrer que la courbe C_g présente un point d'inflexion.

- Dérivée seconde : $g''(x)=-6x+6$
- Signe de ladérivée seconde : $g''(x)=0 \iff x=1$
  $g''(x)>0 \iff -6x+6>0 \iff -6x>-6 \iff x<1$
- Conclusion :

x	$-\infty$		1		4
signe de $g''(x)$		$+$	0	-	

- Sur $]-\infty;1[$ on a $g''(x)>0$, ainsi g est convexe sur $]-\infty;1[$.
- Sur $]1;4]$ on a $g''(x)<0$, ainsi g est concave sur $]1;4]$.
- La dérivée seconde de g s'annule en changeant de signe en 1 ; donc le point de C_g d'abscisse 1 est un point d'inflexion.

4 Déduire des questions précédentes le signe de h définie sur $]-\infty;4]$ par : $h(x) = g(x) - (3x-2)$

On remarque que $h(x) = g(x) - (3x-2) = y_{C_g} - y_T$.
Ainsi le signe de h donne la position relative de C_g et T.
Comme le point de C_g d'abscisse 1 est un point d'inflexion, la tangente T traverse la courbeC_g.
Plus précisément, comme g est convexe sur $]-\infty;1]$; T est en dessous de C_g sur $]-\infty;1]$; T, par ailleurs g est concave sur $[1;4]$; T est au dessus de C_g sur $[1;4]$.