Nom : .... Prénom :	DS 09	TSTI2D Oiselet — Devoir n° 13	Avril 2024 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 10,5 points

10.5 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{3}{7}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde B, la probabilité qu'il perde la partie est de $\frac{3}{10}$;

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1 La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{6}{35}$ **c.** $\frac{7}{35}$ **d.** $\frac{6}{25}$

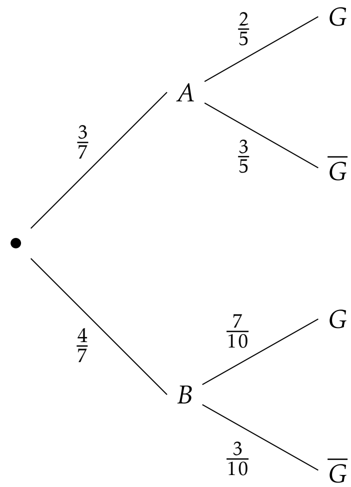
On veut ici calculer $P(A \cap G) = P(A) \times P_G(A) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$

La bonne réponse est b.

2 La probabilité $P(G)$ de l'événement G est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{4}{7}$ **d.** $\frac{3}{7}$

L'arbre représentant la situation :



$$\begin{aligned}
P(G) &= P(A \cap G) + P(B \cap G) \\
&= \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{7}{10} \\
&= \frac{6}{35} + \frac{28}{70} \\
&= \frac{20}{35} = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

3 La probabilité $P_G(B)$ de l'événement B sachant que G est réalisé est égale à :

a. $\frac{5}{7}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{10}$ **d.** $\frac{1}{5}$

La probabilité $P_G(B)$ de l'événement B sachant que G est réalisé est égale à :

$$\begin{aligned}
P_G(B) &= \frac{P(G \cap B)}{P(G)} \\
&= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{7}{10}}{\frac{4}{7}} \\
&= \frac{7}{10}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

4 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,7$ et $P_A(\overline{B}) = 0,2$. Quelle est la valeur de $P(A \cap B)$?

a. $0,14$ **b.** $0,56$ **c.** $0,9$ **d.** 2

Comme $P_A(\overline{B}) = 0,2$, on déduit $P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 0,8$

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)& \\
&= 0,7 \times 0,8 \\
&= 0,56
\end{aligned}$$

La bonne réponse est b.

5 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{2}{5}$ $P(A \cap B) = \dfrac{6}{31}$.
Que valent $P_A(B)$ et $P_B(A)$?

a. $P_A(B) = \dfrac{18}{31}$ et $P_B(A) = \dfrac{15}{31}$

b. $P_A(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P_B(A) = \dfrac{2}{5}$

c. $P_A(B) = 1$ et $P_B(A) = 0$

d. $P_A(B) = P_B(A) = 0,5$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{31}}{\frac{1}{3}} = 3 \times \frac{6}{31} = \frac{18}{31}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{31}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \times \frac{6}{31} = \frac{15}{31}$$

La bonne réponse est a.

6 Soient A et B deux événements indépendants. On peut alors affirmer que : $P_A(B) = P_B(A)$

a. Vrai

b. Faux

Comme A et B deux événements indépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

La bonne réponse est b.

7 Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **b.** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ **c.** $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$ **d.** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

La bonne réponse est b.

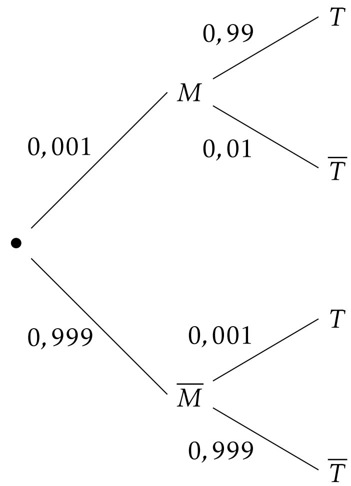
Exercice 2 — 0 point

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test.
Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %.
On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

1 Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.



2 Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

On utilise la partition $M, \overline{M}$:

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,0015 \\ &= 0,001\,(0,99 + 0,999) \\ &= 1,989 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 1,989 \times 10^{-3}}$$

3 L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

On calcule $P_T(M)$:

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{0,99}{1,989} \\ &= \frac{110}{221} \approx 0,498 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ayant } P_T(M) < \tfrac{1}{2}, \text{ l'affirmation est vraie.}}$$

Exercice 3 — 2 points

2 pts On donne deux évènements A et B tels que $p(A) = 0,25$, $p(B) = 0,4$ et $p(A \cup B) = 0,55$.A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Comme $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, on déduit $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$,donc :

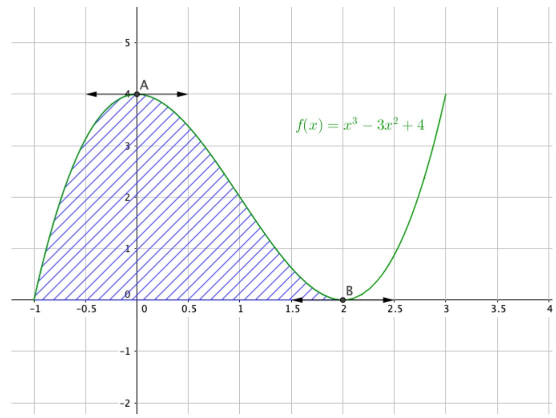
$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\ &= 0,25 + 0,4 - 0,55 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p(A)\times p(B) &= 0,25\times 0,4 \\ &= 0,1 \\ &= p(A\cap B) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ayant } p(A\cap B) = p(A)\times p(B)\text{, les deux évènements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$

Exercice 4 **2,5 points**



Pour tout x de I, on a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

2.5 pts Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan hachurée.

D'après le graphique, la fonction f est positive sur $[-1;2]$, l'aire hachurée vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(2) - F(-1) \\ & f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \\ & F(x) = \tfrac{x^4}{4} - x^3 + 4x \\ F(2) &= \tfrac{2^4}{4} - 2^3 + 4\times 2 \\ &= 4 - 8 + 8 = 4 \\ F(-1) &= \tfrac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4\times(-1) \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 - 4 = \tfrac{1}{4} - 3 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{12}{4} = -\tfrac{11}{4} \\ \\ \mathcal{A} = &= 4 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{27}{4} \end{aligned}$$

$\mathcal{A} = \frac{27}{4}u.a.$, ici l'unité d'aire vaut 2 cm × 1cm = 2cm^2.
$\mathcal{A} = \frac{27}{4}u.a. = \frac{27}{4}\times 2cm^2 = 13,5cm^2$

$$\boxed{\mathcal{A} = 13,5\ cm^2}$$